Adición de series mediante el método de expansión integral

Manuel Verdes Piñeiro

Resumen.
En este artículo se describe un método para la suma de series, o de subconjuntos de secuencias de números que respondan a una ley dada $f(n),\ n \in \mathbf{Z}$. Se trata de un procedimiento que genera una buena aproximación a la suma, y la adición exacta para funciones en forma de polinomio.

Supone una alternativa a la fórmula sumatoria de Euler-McLaurin, que es presentada en la descripción del método, puesto que en realidad con expansión integral no se utilizan de modo imprescindible los números de Bernoulli y las derivadas.

Primero se expone formalmente el método y se demuestra que suma de modo exacto los polinomios. Después se establecen dos condiciones que de modo suficiente justifican la aplicación del método, y se expresan aproximaciones a la esperanza matemática del error cometido para cada iteración, si consideramos una cantidad reducida de cálculos. También se expone un criterio para determinar el número de iteraciones óptimo.

Finalmente se realiza una comparativa entre el método de Euler-McLaurin y el tratado en este artículo, para lo cual ambos son implementados mediante funciones en el lenguaje de programación Matlab, y con ellas se hacen cálculos de sumas por ordenador para diferentes funciones y para diferentes números de iteraciones, cuyos resultados son comentados.

1 Descripción del método

L. Euler y C. McLaurin desarrollaron por separado una fórmula de adición que relaciona las sumas parciales de una serie con la integral y las derivadas de su término general, adoptando la forma :

$$\sum_{n=n_0}^{n_1} f(n) = \int_{n_0}^{n_1+1} f(s)ds + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \left\{ f^{(k-1}(n_1+1) - f^{(k-1}(n_0) \right\} + Z_n$$

siendo B_k los números de Bernoulli y Z_n el término residual.
Con total desconocimiento por mi parte de la existencia de este método en el momento de la génesis del procedimiento que aquí me ocupa, me he planteado buscar una nueva manera de obtener la suma de una serie, pero, como ha sucedido y sucede muchas veces, mi solución se genera a partir del mismo punto de partida que en el caso del algoritmo de Euler-McLaurin, siendo su desarrollo diferente. Aunque el punto de partida es el mismo, ambas ideas de cálculo fueron gestadas de modo independiente. A continuación describo el método de expansión integral.
Sea

Mathematics Subject Classifications: 40C10

e-mail: manuel.verdes@gmail.com.

$$S = \sum_{n=n_0}^{n_1} f(n)$$

Esta suma es posible obtenerla con una integral

$$S = \int_{n_0}^{n_1+1} f^*(s)ds,$$

donde $f^*(x)$ sería una "función escalera" definida :

$$f^*(x) = \begin{cases} f(Ent(x))\,, & \text{para x} \geq 0. \\ f(Ent(x)-1)\,, & \text{para x} < 0. \end{cases}$$

De este modo, comienzo el desarrollo de la misma manera que lo hacen Euler y McLaurin, escribiendo:

$$S = \int_{n_0}^{n_1+1} \{f(x) - f(x) + f^*(x)\}\, dx = \int_{n_0}^{n_1+1} f(x)dx - \sum_{n=n_0}^{n_1} \left\{ \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n) \right\} \tag{1}$$

De tal forma que :

$$S = \int_{n_0}^{n_1+1} f(x)dx - E_1,\ E_1 = \sum_{n=n_0}^{n_1} R_1(n)$$

Si aplicamos de nuevo la igualdad (1) a la suma $E_1 = \sum_{n=n_0}^{n_1} R_1(n)$, -con $f(n) = R_1(n)$- obtenemos

$$S = \int_{n_0}^{n_1+1} f(s)ds - \int_{n_0}^{n_1+1} R_1(s)ds + E_2,\ \ E_2 = \sum_{n=n_0}^{n_1} R_2(n)$$

donde

$$R_1(x) = \int_x^{x+1} f(s)ds - f(x), \quad R_2(n) = \int_n^{n+1} \left\{ \int_x^{x+1} f(s)ds - f(x) \right\} dx - \left\{ \int_n^{n+1} f(s)ds - f(n) \right\}$$

$$R_2(n) = \int_n^{n+1} \int_x^{x+1} f(s)ds - 2\int_n^{n+1} f(s)ds + f(n)$$

Si continuamos usando (1), deducimos la siguiente expresión para S :

$$S = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \int_{n_0}^{n_1+1} R_i(x)dx + E_k, \quad E_k = (-1)^k \sum_{n=n_0}^{n_1} R_k(n) \tag{2}$$

siendo

$$R_i(x) = \int_x^{x+1} R_{i-1}(s)ds - R_{i-1}(x) \tag{3}$$

Desarrollando la expresión de $R_i(x)$ para i creciente, obtenemos :

$$R_0(x) = f(x)$$

$$R_1(x) = \int_x^{x+1} f(s)ds - f(x)$$

$$R_2(x) = \int_x^{x+1}\int_y^{y+1} f(s)dsdy - 2\int_x^{x+1} f(s)ds + f(x)$$

$$R_3(x) = \int_x^{x+1}\int_y^{y+1}\int_z^{z+1} f(s)dsdzdy - 3\int_x^{x+1}\int_y^{y+1} f(s)dsdy + 3\int_x^{x+1} f(s)ds - f(x)$$

$$\vdots$$

Y, en general, se puede observar que para cualquier i

$$R_i(x) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\int_x^{x+1}\ldots(k)\ldots f(s)ds \tag{4}$$

con

$$\int_x^{x+1}\ldots(k)\ldots f(s)ds = \int_x^{x+1}\int_{x_k}^{x_k+1}\cdots\int_{x_2}^{x_2+1} f(x_1)dx_1dx_2\ldots dx_k \;\; ;$$

$$\int_x^{x+1}\ldots(0)\ldots f(s)ds = f(x)$$

Pero si escribimos

$$\Delta_\delta^i G_i(x) = \frac{\Delta_\delta^{i-1}G_i(x+\delta) - \Delta_\delta^{i-1}G_i(x)}{\delta} \quad para\; i > 0,$$

$$\Delta_\delta^0 G_0(x) = G_0(x) = f(x), \quad G_1(x) = \int_a^x f(s)ds, \quad G_{i+1}(x) = \int_a^x G_i(s)ds,$$

Entonces tenemos

$$\int_x^{x+1}\ldots(k)\ldots f(s)ds = \Delta_1^k G_k(x)$$

de tal manera que juntando las expresiones (2) y (4) obtenemos :

$$S_k = \int_{n_0}^{n_1+1}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\sum_{l=0}^{i}(-1)^{i-l}\binom{i}{l}\Delta_1^l G_l(s)ds$$

$$S_k = \int_{n_0}^{n_1+1}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{i}(-1)^l\binom{i}{l}\Delta_1^l G_l(s)ds$$

Es posible llegar a las siguientes identidades:

$$S = S_k + E_k, \quad S_k = \int_{n_0}^{n_1+1} F_k(s)ds$$

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\left(\sum_{m=i}^{k-1}\binom{m}{i}\right)\Delta_1^i G_i(x), \quad E_k = \sum_{n=n_0}^{n_1}\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\Delta_1^m G_m(n) \tag{5}$$

Esta es la manera más condensada de expresar el método, relacionando la suma con las diferencias divididas de las funciones primitivas, tomando $\delta = 1$.

2 Proposiciones sobre la convergencia

En esta sección se aportan tres proposiciones acerca de la convergencia del método de expansión integral. La primera de ellas establece que los polinomios son sumados de modo exacto por el método, y cada una de las dos siguientes establace una condición suficiente acerca de la convergencia del mismo.

Proposición 1 *El método suma de manera exacta los polinomios.*
Sea $R_0(x) = f(x) = p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \Pi_n$*. Entonces* $E_{n+1} = 0$*, es decir, se suma de modo exacto tras* $n+1$ *iteraciones.*

PRUEBA. Para el $R_0(x)$ dado calculamos $R_1(x)$:

$$R_1(x) = \int_x^{x+1} R_0(x)dx - R_0(x) = \int_x^{x+1} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) dx - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$R_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_x^{x+1} x^i dx - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} \left[x^{i+1} \right]_x^{x+1} - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Ahora usamos la fórmula del Binomio de Newton, y tenemos:

$$R_1(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} x^j - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

De esta manera podemos escribir :

$$R_1(x) = \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} \right) + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) x + \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} \binom{i+1}{2} \right) x^2 + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \left(\sum_{i=n-1}^{n} \frac{a_i}{i+1} \binom{i+1}{n} \right) x^n + \left(\frac{a_n}{n+1} \right) x^{n+1} - \left\{ \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right\} \right.$$

$$R_1(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i+1} \right) + \left(\sum_{i=2}^{n} a_i \right) x + \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{a_i}{i+1} \binom{i+1}{2} \right) x^2 + \dots$$

$$\dots + \left(\sum_{i=n-2}^{n} \frac{a_i}{i+1} \binom{i+1}{n-1} - \left(\frac{a_{n-2}}{n-1} + a_{n-1} \right) \right) x^{n-1}$$

$R_1(x) \in \Pi_{n-1} \Rightarrow R_n(x) \in \Pi_0 \Rightarrow E_{n+1} = 0$

Entonces los polinomios se suman de forma exacta con el método. $\square$

Proposición 2 *Sea* $f(x) \in \boldsymbol{C}^{\infty}$*, verificando*

$$|R_i(n)| > \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left| R_i^{(j}(n) \right|}{j!}, \ \ \forall n \in \{n_0, \dots, n_1\}, \ \forall i \in \boldsymbol{N}^* / \{i_1, \dots, i_N\} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} E_k = 0$$

PRUEBA.
Consideremos el vector

$$\overline{e_i} = (R_i(n_0), R_i(n_0+1), \ldots, R_i(n_1))^T$$

y el número positivo

$$\|\overline{e_i}\|_1 = \sum_{n=n_0}^{n_1} |R_i(n)|,$$

verificándose

$$|E_i| = \left|\sum_{n=n_0}^{n_1} R_i(n)\right| \leq \sum_{n=n_0}^{n_1} |R_i(n)| = \|\overline{e_i}\|_1.$$

Podemos escribir

$$\|\overline{e_{i+1}}\|_1 = \sum_{n=n_0}^{n_1} \left|\int_n^{n+1} R_i(x)dx - R_i(n)\right|$$

Usando el teorema del valor medio del cálculo integral, existe $\mu_n \in [n, n+1]$, de tal manera que $\int_n^{n+1} R_i(x)dx = R_i(\mu_n)$. Si reemplazamos esta identidad en la expresión previa tenemos:

$$\|\overline{e_{i+1}}\|_1 = \sum_{n=n_0}^{n_1} |R_i(\mu_n) - R_i(n)|, \quad 0 \leq (\mu_n - n) \leq 1$$

Como $R_i(x) \in \mathbf{C}^\infty, \forall i$, dada la relación (3), podemos expresar $R_i(\mu_n)$ por medio del desarrollo en serie de Taylor en $x_0 = n$, de tal forma que obtenemos:

$$\|\overline{e_{i+1}}\|_1 = \sum_{n=n_0}^{n_1} \left| R_i^{'}(n)(\mu_n - n) + \frac{1}{2} R_i^{''}(n)(\mu_n - n)^2 + \frac{1}{6} R_i^{'''}(n)(\mu_n - n)^3 + \ldots \right|$$

Como $0 \leq |\mu_n - n| \leq 1$, es posible deducir la siguiente desigualdad

$$\|\overline{e_{i+1}}\|_1 \leq \sum_{n=n_0}^{n_1} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{R_i^{(j}(n)}{j!} \right| |\mu_n - n|^j \leq \sum_{n=n_0}^{n_1} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{R_i^{(j}(n)}{j!} \right|$$

Para $i > i^* = \max\{i_1, \ldots, i_N\}$ se verifica por hipótesis

$$|R_i(n)| > \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left|R_i^{(j}(n)\right|}{j!}, \ \forall n \in \{n_0, \ldots, n_1\}$$

Entonces, para $i > i^*$ se tiene

$$|E_{i+1}| \leq \|\overline{e_{i+1}}\|_1 < \sum_{n=n_0}^{n_1} |R_i(n)| = \|\overline{e_i}\|_1$$

Además, el límite de $\|\overline{e_i}\|_1$ es 0 cuando i tiende a ∞, dado que por hipótesis

$$\exists K_i > 1 / |R_i(n)| = K_i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left|R_i^{(j}(n)\right|}{j!}, \ \forall n \in \{n_0, \ldots, n_1\}, \ \forall i \in \mathbf{N}^* / \{i_1, \ldots, i_N\}$$

y si además es $K_* = \inf_{i \in \mathbf{N}^*/\{i_1,\ldots,i_N\}} K_i$, lo cual tiene sentido por estar K_i acotado inferiormente, entonces si tenemos en cuenta que se cumple $\|\overline{e_{i+1}}\|_1 < \left(\frac{1}{K_*}\right)\|\overline{e_i}\|_1$

$$\forall m > 0,\ \|\overline{e_{m+i+1}}\|_1 < \left(\frac{1}{K_*}\right)^m \|\overline{e_i}\|_1$$

se sigue de modo inmediato que $\lim_{i\to\infty} \|\overline{e_i}\|_1 = 0$, puesto que si es $K_* > 1$ entonces

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{K_*}\right)^m \|\overline{e_i}\|_1 = 0$$

y si $K_* = 1$, entonces tendríamos

$$\forall m > 0,\ \|\overline{e_{m+i+1}}\|_1 < \|\overline{e_i}\|_1\,,$$

de lo cual se deduciría que $\|\overline{e_i}\|_1$ es decreciente de límite 0.

Como $\|\overline{e_i}\|_1$ es monótona decreciente a partir de i^*, y además de límite 0, entonces dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $k \in \mathbf{N}^*\ /\ \epsilon > \|\overline{e_k}\|_1$, cumpliéndose que

$$\forall j \geq 0,\ \ |E_{k+j} - 0| \leq \|\overline{e_{k+j}}\|_1 < \epsilon \quad \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} E_k = 0$$

□

Proposición 3 *Sea*

$$f(x) \in \boldsymbol{C}^\infty\ \ / \lim_{j\to\infty} \max_{x\in[n_0,n_1+coc(j/2)+resto(j/2)]} \left|f^{(j}(x)\right| = 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} E_k = 0$$

PRUEBA.

Como $f(x) \in \mathbf{C}^\infty$ entonces $R_i(x) \in \mathbf{C}^\infty\ \forall i$, dada su dependencia con $f(x)$, según la ecuación (3). Si derivamos j veces la expresión (3) para $x = n$, obtenemos:

$$\left|R_i^{(j}(n)\right| = \left|R_{i-1}^{(j-1}(n+1) - R_{i-1}^{(j-1}(n) - R_{i-1}^{(j}(n)\right|$$

Aplicando en la anterior expresión el teorema del valor medio del cálculo diferencial tenemos:

$$\left|R_i^{(j}(n)\right| = \left|R_{i-1}^{(j}(\xi_1) - R_{i-1}^{(j}(n)\right|,\ \ \xi_1 \in [n, n+1]$$

Usando el mismo resultado de nuevo, $\exists \xi_2 \in [n, \xi_1]$ y $\xi_3 \in [\xi_2, \xi_2 + 1]$, de tal manera que:

$$|R_i^{(j}(n)| = |R_{i-1}^{(j}(\xi_1) - R_{i-1}^{(j}(n)| = |R_{i-1}^{(j+1}(\xi_2)||\xi_1 - n| < |R_{i-1}^{(j+1}(\xi_2)| = |R_{i-2}^{(j+1}(\xi_3) - R_{i-2}^{(j+1}(\xi_2)|$$

Si repetimos este razonamiento otras $i-1$ veces, obtenemos:

$$|R_i^{(j}(n)| < |R_{i-1}^{(j+1}(\xi_2)| < |R_{i-2}^{(j+2}(\xi_4)| < \ \ldots\ < |R_0^{(j+i}(\xi_{2i})| = |f^{(j+i}(\xi_{2i})| < max_{x\in[n_0,n_1+i]}\{|f^{(j+i}(x)|\}\ ,$$

con $\xi_i \in [n, n + coc(i/2) + resto(i/2)]$

Este resultado, combinado con la hipótesis, implica que $\left|R_i^{(j}(n)\right|$ decrece hacia 0 mientras que i ó j (ó i y j) crecen, pues:

$$\forall m > 0,\ \forall l > 0,\ \left|R_{i+l}^{(j+m}(n)\right| < \max_{x\in[n_0,n_1+coc((i+j+l+m)/2)+resto((i+j+l+m)/2)]}\left|f^{(i+j+l+m}(x)\right|$$

y por tanto $\left|R_{i+l}^{(j+m}(n)\right| \to 0,\ si\ l \to \infty,\ ó\ m \to \infty$
Pero

$$\lim_{l\to\infty}|E_l| \le \lim_{l\to\infty}\|\overline{e_l}\|_1 \le \lim_{l\to\infty}\sum_{n=n_0}^{n_1}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{R_{l-1}^{(j}(n)}{j!}\right| = 0$$

Luego

$$\lim_{i\to\infty} E_i = 0$$

□

3 Proposiciones sobre aproximaciones al término de error

En la presente sección se demuestra una primera proposición que asumiendo una de las hipótesis de convergencia muestra una aproximación al término de error para la etapa i-ésima. Además se presentan otras dos proposiciones que presentan aproximaciones a la esperanza matemática del error cometido, bajo el supuesto de realizarse un número de cálculos reducido, así como otra aproximación usando la fórmula de Euler-McLaurin, y dos acotaciones al módulo del error.

Proposición 4 *Supongamos que* $f(x) \in \boldsymbol{C}^{\infty}$, $(\Rightarrow R_i(x) \in \boldsymbol{C}^{\infty},\ \forall i)$*, y que*

$$\max_{x\in[n_0,n_1]}|f(x)| >> \max_{x\in[n_0,n_1+1]}\left|f^{'}(x)\right| >> \max_{x\in[n_0,n_1+1]}\left|f^{''}(x)\right| >> \ldots >> \max_{x\in[n_0,n_1+coc(i/2)+resto(i/2)]}\left|f^{(i}(x)\right|,$$

$$\max_{x\in[n_0,n_1+coc((i+k)/2)+resto((i+k)/2)]}\left|f^{(i+k}(x)\right| \approx 0,\ k > 0 \tag{7}$$

$\Rightarrow$ entonces

$$E_i \approx \frac{1}{2}\left\{R_{i-1}(n_1+1) - R_{i-1}(n_0)\right\} - \frac{1}{4}\left\{R_{i-1}^{'}(n_1+1) - R_{i-1}^{'}(n_0)\right\}$$

PRUEBA. Vamos a calcular una aproximación al error de la etapa i-ésima, E_i

$$E_i = \sum_{n=n_0}^{n_1}\int_n^{n+1} R_{i-1}(x)dx - R_{i-1}(n) \tag{8}$$

Si evaluamos $R_{i-1}(x)$ usando el desarrollo en serie de Taylor, tenemos:

$$R_{i-1}(x) - R_{i-1}(n) = R_{i-1}^{'}(n)(x-n) + \frac{R_{i-1}^{''}(n)}{2}(x-n)^2 + \frac{R_{i-1}^{'''}(n)}{6}(x-n)^3 + \ldots \tag{9}$$

Dada la hipótesis (7), que implica, por la proposición 3 que $\left|R_{i-1}^{(j}(n)\right| \approx 0$ cuando $j \ge 2$, podemos aproximar $R_{i-1}(n+1) - R_{i-1}(n)$ por $R_{i-1}^{'}(n)$. Por tanto,

$$R_{i-1}(n+1) - R_{i-1}(n) \approx R_{i-1}^{'}(n)$$

$$R_{i-1}(n+1) + R_{i-1}(n) = R_{i-1}(n+1) + 2R_{i-1}(n) - R_{i-1}(n) \approx R_{i-1}^{'}(n) + 2R_{i-1}(n)$$

Además $\int_n^{n+1} R_{i-1}(x)dx = R_{i-1}(\xi),\ \ \xi \in [n, n+1]$. Si mantenemos el mismo razonamiento de (9) obtenemos

$$R_{i-1}(x) \approx (x-n)R_{i-1}^{'}(n) + R_{i-1}(n),\ \ x \in [n, n+1] \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow R_{i-1}(\xi) \approx (\xi - n)R_{i-1}^{'}(n) + R_{i-1}(n)$$

$$\Leftrightarrow R_{i-1}(\xi) \approx (\xi - n)(R_{i-1}(n+1) - R_{i-1}(n)) + R_{i-1}(n),\ \ (\xi - n) \approx \frac{1}{2}$$

De tal manera que podemos escribir:

$$R_{i-1}(\xi) \approx \frac{R_{i-1}(n+1) + R_{i-1}(n)}{2}$$

Sustituyendo en (7), tenemos:

$$E_i \approx \sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{R_{i-1}(n+1) + R_{i-1}(n)}{2} - R_{i-1}(n) \approx \sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{R_{i-1}^{'}(n) + 2R_{i-1}(n)}{2} - R_{i-1}(n) =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{R_{i-1}^{'}(n)}{2} = E_i^{'}$$

Pero, aplicando expansión integral

$$E_i^{'} = \sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{R_{i-1}^{'}(n)}{2} = \frac{1}{2}\int_{n_0}^{n_1+1} R_{i-1}^{'}(x)dx - \frac{1}{2}E_i^{(1)} = \frac{1}{2}\left\{R_{i-1}(n_1+1) - R_{i-1}(n_0)\right\} - \frac{1}{2}E_i^{(1)}$$

donde

$$E_i^{(1)} \approx \sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{R_{i-1}^{''}(n)}{2} = \frac{1}{2}\left\{R_{i-1}^{'}(n_1+1) - R_{i-1}^{'}(n_0)\right\} - \frac{1}{2}E_i^{(2)}$$

Pero por medio de la hipótesis (7) y de la proposición 3, $\left|R_{i-1}^{(j}(n)\right| \approx 0$ cuando $j \geq 2$. Entonces $E_i^{(2} \approx 0$. Por tanto, tenemos:

$$E_i \approx \frac{1}{2}\left\{R_{i-1}(n_1+1) - R_{i-1}(n_0)\right\} - \frac{1}{4}\left\{R_{i-1}^{'}(n_1+1) - R_{i-1}^{'}(n_0)\right\}$$

□

Proposición 5 *Supongamos que $f(x) \in \boldsymbol{C}^{\infty}$, y que se cumple la hipótesis (7). ⇒ Entonces, E_i se puede modelar como una variable aleatoria gaussiana cuya esperanza matemática, en el caso de que hagamos un número de cálculos reducido, es aproximadamente*

$$\boldsymbol{E}\left\{E_i/_{cálc.red.}\right\} = \frac{1}{2}\left\{R_{i-1}(n_1+1) - R_{i-1}(n_0)\right\} - \frac{1}{4}\left\{R_{i-1}^{'}(n_1+1) - R_{i-1}^{'}(n_0)\right\}$$

PRUEBA. Como vimos en la proposición 5, podemos escribir:

$$E_i = \sum_{n=n_0}^{n_1} \int_n^{n+1} R_{i-1}(x)dx - R_{i-1}(n)$$

Mediante el teorema del valor medio del cálculo integral, tenemos que $\exists \xi_n \in [n, n+1]$ tal que

$$E_i = \sum_{n=n_0}^{n_1} (R_{i-1}(\xi_n) - R_{i-1}(n))$$

Si tenemos en cuenta que se cumple la hipótesis (7) y la expresión (9), también es cierta la expresión (10). Entonces,

$$R_{i-1}(\xi_n) - R_{i-1}(n) \approx R_{i-1}^{'}(n)(\xi_n - n)$$

Pero nosotros desconocemos la posición de ξ_n. Sabemos que se halla entre n y $n+1$ y que se podría calcular mediante la resolución del problema de punto fijo:

$$\xi_n = \frac{R_{i-1}(\xi_n) - R_{i-1}(n)}{R_{i-1}^{'}(n)} + n = R(\xi_n), \ \ \forall n \in \{n_0, \ldots, n_1\}$$

Como $f(x)$ puede variar de cualquier manera, a priori ξ_n puede estar en cualquier lugar del intervalo $[n, n+1]$. Por tanto, podemos modelar ξ_n como una variable aleatoria uniforme distribuida en el intervalo $[n, n+1]$ $\xi_n \equiv \mathbf{U}(n, n+1)$, evitándonos así el cálculo de cada ξ_n. De esta forma, como E_i se escribe

$$E_i \approx \sum_{n=n_0}^{n_1} R_{i-1}^{'}(n)(\xi_n - n),$$

E_i se puede modelar como una variable aleatoria gaussiana, aplicando el teorema central del límite.

$$E_i \equiv N\left(\mathbf{E}\{E_i\}, \sqrt{Var\{E_i\}}\right)$$

Su esperanza matemática se puede calcular:

$$\mathbf{E}\{E_i/_{cálc.red.}\} \approx \mathbf{E}\left\{\sum_{n=n_0}^{n_1} R_{i-1}^{'}(n)(\xi_n - n)\right\} = \sum_{n=n_0}^{n_1} R_{i-1}^{'}(n)\mathbf{E}\{(\xi_n - n)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=n_0}^{n_1} R_{i-1}^{'}(n)$$

Esta expresión coincide con la deducida como aproximación al error en la proposición 4. La varianza de la variable aleatoria E_i se calcularía:

$$Var\{E_i/_{cálc.red.}\} \approx \mathbf{E}\left\{(\sum_{n=n_0}^{n_1} R_{i-1}^{'}(n)(\xi_n - n))^2\right\} - \mathbf{E}^2\{E_i/_{cálc.red.}\}$$

$\square$

Proposición 6 *Supongamos que $f(x) \in C^\infty$, y que se cumple la hipótesis (6). $\Rightarrow$ Entonces, E_i se puede modelar como una variable aleatoria gaussiana, si realizamos un número reducido de cálculos*, y $\exists J$ y $\{k_j\}_{j \in N^*}$, tales que su esperanza matemática es aproximadamente:*

$$\boldsymbol{E}\left\{E_i/_{cálc.red.^*}\right\} \approx \sum_{j=1}^{J}\sum_{m=0}^{k_j-1}\frac{(-1)^m}{2^m(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(j-1+m}(n_1+1)-R_{i-1}^{(j-1+m}(n_0)\right\}$$

Otra aproximación no tan buena y precisa, pero más corta, si no tenemos en cuenta por brevedad los términos para $m \in \{1,\ldots,k_j-1\}$, con $j \in \{1,\ldots,J\}$, a costa de una mayor inexactitud sería

$$\boldsymbol{E}\left\{E_i/_{cálc.red.^*}\right\} \approx \sum_{j=1}^{J}\frac{1}{(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(j-1}(n_1+1)-R_{i-1}^{(j-1}(n_0)\right\}$$

PRUEBA. De la misma forma que se hizo en la proposición 5, podemos escribir:

$$E_i = \sum_{n=n_0}^{n_1}\int_n^{n+1}R_{i-1}(x)dx - R_{i-1}(n) = \sum_{n=n_0}^{n_1}\left(R_{i-1}(\xi_n)-R_{i-1}(n)\right),\ \ \xi_n \in [n,n+1]$$

Pero también es cierto, si aplicamos el desarrollo en serie de Taylor:

$$R_{i-1}(\xi_n)-R_{i-1}(n) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}R_{i-1}^{(j}(n)(\xi_n-n)^j$$

Ante esta expresión, si quisiéramos obtener su valor exacto deberíamos conocer todos los ξ_n, y los $R_{i-1}^{(j}(n), \forall j$. Para calcular los ξ_n necesitaríamos resolver todos los problemas de punto fijo análogos al descrito en la proposición 5, para cada valor de n entre n_0 y n_1. Pero esta tarea sería excesivamente laboriosa y en su lugar reduciré los cálculos, identificando ξ_n con una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[n,n+1]$, de tal forma que (ξ_n-n) se puede modelar como una variable aleatoria uniforme en $(0,1)$ $\ (\xi_n-n)\equiv U(0,1)$, y tomando sólo algunos de los infinitos términos de la suma, calculando de este modo una esperanza matemática del error condicionada a que hacemos un número reducido de cálculos :

$$\mathbf{E}\left\{E_i/_{cálc.red.^*}\right\} = \sum_{n=n_0}^{n_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{R_{i-1}^{(j}(n)}{j!}\mathbf{E}\left\{(\xi_n-n)^j\right\}$$

Pero,

$$\mathbf{E}\left\{(\xi_n-n)^j\right\} = \int_0^1 x^j dx = \frac{1}{j+1}$$

Entonces:

$$\mathbf{E}\left\{E_i/_{cálc.red.^*}\right\} = \sum_{n=n_0}^{n_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{R_{i-1}^{(j}(n)}{(j+1)!}$$

Para cada valor de j fijo podemos aplicar expansión integral

$$\sum_{n=n_0}^{n_1}\frac{R_{i-1}^{(j}(n)}{(j+1)!} = \frac{1}{(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(j-1}(n_1+1)-R_{i-1}^{(j-1}(n_0)\right\} - E_j^{(1)}$$

$$E_j^{(1)} \approx \sum_{n=n_0}^{n_1}\frac{R_{i-1}^{(j+1}(n)}{2(j+1)!} = \frac{1}{2(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(j}(n_1+1)-R_{i-1}^{(j}(n_0)\right\} - E_j^{(2)}$$

$$\ldots$$

$$\sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{R_{i-1}^{(j}(n)}{(j+1)!} = \frac{1}{(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(j-1}(n_1+1) - R_{i-1}^{(j-1}(n_0)\right\} - \frac{1}{2(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(j}(n_1+1) - R_{i-1}^{(j}(n_0)\right\} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{4(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(j+1}(n_1+1) - R_{i-1}^{(j+1}(n_0)\right\} + \dots + \frac{(-1)^{k_j-1}}{2^{k_j-1}(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(k_j-2+j}(n_1+1) - R_{i-1}^{(k_j-2+j}(n_0)\right\} \tag{11}$$

Tenemos entonces para cada valor de j una expresión (11). La aproximación exacta para la esperanza del error E_i sería la suma de todos los términos para todos los $j \in \{1, \dots, \infty\}$. Pero cuando j crece, $(j+1)!$ aumenta mucho y $R_{i-1}^{(j}(n)$ disminuye mucho, de tal forma que existe un valor para $j = J$ a partir del cual los términos que aparecen no son significativos, y existe un valor de k_j para cada $j \in \{1, \dots, J\}$ a partir del cual $(R_{i-1}^{(j-1+k_j+p}(n_1+1) - R_{i-1}^{(j-1+k_j+p}(n_0)) \approx 0,\ \ \forall p > 0$. Entonces, $\exists J,\ \{k_j\}_{j\in\{1,\dots,J\}}$ tales que

$$\mathbf{E}\left\{E_i/_{cálc.red.^*}\right\} \approx \sum_{j=1}^{J}\sum_{m=0}^{k_j-1} \frac{(-1)^m}{2^m(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(j-1+m}(n_1+1) - R_{i-1}^{(j-1+m}(n_0)\right\}$$

Además, si no queremos realizar tantos cálculos podemos quedarnos para cada $j \in \{1, \dots, J\}$ con el primer término $(m = 0)$, sin tener en cuenta $E_j^{(1)},\ \forall j,$ aunque la aproximación será peor.

$$\mathbf{E}\left\{E_i/_{cálc.red.^*}\right\} \approx \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{(j+1)!}\left\{R_{i-1}^{(j-1}(n_1+1) - R_{i-1}^{(j-1}(n_0)\right\}$$

□

Proposición 7 *Existe otra manera de obtener la aproximación al error cometido en la etapa i-ésima. En concreto, se puede escribir:*

$$S \approx \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \int_{n_0}^{n_1+1} R_i(s)ds + (-1)^k \sum_{m=1}^{n-1} \frac{B_m}{m!}\left\{R_k^{(m-1}(n_1+1) - R_k^{(m-1}(n_0)\right\}$$

donde B_m son los números de Bernoulli.

PRUEBA. Basta con aplicar la fórmula de Euler-McLaurin a E_k en la siguiente expresión:

$$S = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \int_{n_0}^{n_1+1} R_i(x)dx + E_k, \quad E_k = (-1)^k \sum_{n=n_0}^{n_1} R_k(n)$$

□

Proposición 8 *Dos acotaciones válidas para el módulo del error, si se cumple la condición (7) son*

$$|E_i| < (n_1 - n_0 + 1)\sum_{j=1}^{J} \max_{x\in[n_0, n_1+i]} \left|f^{(i+j-1}(x)\right|$$

$$|E_i| < (n_1 - n_0 + 1) \max_{x\in[n_0, n_1+i]} |f(x)| (\exp 1 - 1)$$

PRUEBA. La demostración de ambas cotas es trivial. Probaré la segunda:

$$|E_i| < \sum_{n=n_0}^{n_1} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{R_i^{(j}(n)}{j!} \right| |\mu_n - n|^j <$$

$$< \sum_{n=n_0}^{n_1} \sum_{j=1}^{\infty} \max_{x \in [n_0, n_1+i]} \left| f^{(i+j-1}(x) \right| \frac{|\mu_n - n|^j}{j!} <$$

$$< \max_{x \in [n_0, n_1+i],\ j \in\ 1 \ldots J} \left| f^{(i+j-1}(x) \right| \sum_{n=n_0}^{n_1} \left(\exp\left(\mu_n - n\right) - 1 \right) <$$

$$< (n_1 - n_0 + 1) \max_{x \in [n_0, n_1+i]} |f(x)| \left(\exp 1 - 1 \right)$$

□

4 Cálculo del número de iteraciones óptimo

Definición 1 *Se define la diferencia interpaso r_p de la forma*

$$r_p = \frac{\left| \frac{f^{(p}(n_0)}{p!} \sum_{n=0}^{n_1-n_0} n^p \right|}{\left| \sum_{i=0}^{p} \frac{f^{(i}(n_0)}{i!} \sum_{n=0}^{n_1-n_0} n^i \right|} = \frac{\left| \frac{f^{(p}(n_0)}{p!} S_p \right|}{\left| \sum_{i=0}^{p} \frac{f^{(i}(n_0)}{i!} S_i \right|}$$

Existe una expresión que relaciona S_l con S_{l-1} :

$$\binom{l+1}{l-1} S_{l-1} + \binom{l+1}{l} S_l = (n_1 - n_0 + 1)^{l+1} - (n_1 - n_0 + 1)$$

Criterio 1 *Supongamos que $f(x)$ admite desarrollo en serie de Taylor en el intervalo $[n_0, n_1 + 1]$. Tomaremos como número de iteraciones a emplear en el método de expansión integral a p_0, definido:*

$$p_0 = \min_{p \in \boldsymbol{N}^*} \{p\} \ \ / \ \ r_p < \alpha, \ \ 0 < \alpha <<< 1$$

Nuestra elección de α tiene que ver de modo directo con el grado de aproximación que queramos en el cálculo de la suma de la serie. Como S_1 representa la primera aproximación a dicha adición, nos puede servir para determinar el α que queremos. Así, si nosotros queremos aproximar hasta las decenas, hemos de tomar $\alpha = \frac{10}{S_1}$. Para aproximar hasta las centenas tomaríamos $\alpha = \frac{100}{S_1}$, y así sucesivamente.

PRUEBA. $f(x)$ admite desarrollo en serie de Taylor, en particular para $x = n$:

$$f(n) = f(n_0) + f^{'}(n_0)(n - n_0) + \frac{f^{''}(n_0)}{2}(n - n_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(p_0}(n_0)}{p_0!}(n - n_0)^{p_0} + \ldots$$

Si $r_{p_0} < \alpha, \ \ 0 < \alpha <<< 1$, luego el término $\frac{f^{(p_0}(n_0)}{p_0!}(n - n_0)^{p_0}$ del desarrollo anterior no es significativo a la hora de aproximar $f(n)$ para calcular $\sum_{n=n_0}^{n_1} f(n)$. Entonces, tenemos un polinomio de grado $p_0 - 1$, que seún la proposición 1 es sumable exactamente en p_0 iteraciones. □

5 Comparación entre las prestaciones del método de expansión integral vs. el método de Euler-McLaurin

Si queremos observar las prestaciones del método de expansión integral, hemos de tomar otro método como referencia, y usar los dos en las mismas series para así conocer cuál de los dos extrae un resultado más próximo al real. Además, para poder hacer muchas comparaciones, es preciso que implementemos los dos algoritmos en sendos programas informáticos, para evitar el tener que hacer los cálculos de forma manual.

De este modo, he decidido programar mediante el lenguaje Matlab el método de expansión integral y el método de Euler-McLaurin. A continuacón muestro el código fuente de las principales funciones Matlab que he implementado:

51. Función Integralexpansion

```
function addition = Integralexpansion (interval,iterations)

step = 0.001;
abscissas = interval(1):step:(interval(length(interval))+iterations);
primitive(1,:) = yfunction(abscissas);

if iterations > 1
   for i = 1:1:iterations-1,
      primitive(i+1,:) = primitivefunction (primitive(i,:),step);
   end;
end;

for k = 1:1:((1/step)*(length(interval))+1),
   delta (1,k) = primitive (1,k);
end;

if iterations > 1,
   for i = 1:1:iterations-1,
      deltai = deltafunction (primitive(i+1,:),
      i+1,((1/step)*(length(interval))+1), step);
      for k = 1:1:length(deltai),
         delta(i+1,k) = deltai(k);
      end;
   end;
end;

K(1) = iterations;
K(2) = 0.5 * (iterations)*(iterations-1);

if iterations >= 3,
  for i = 1:1:(iterations-2),
      l = i+1;
      k = i+1;
      K(i+2) = 0;
      while k < iterations ,
         C(k,l) = nchoosek(k,l);
```

```
         K(i+2) = K(i+2) + C(k,l);
         k = k + 1;
      end;
   end;
end;

integrandum = zeros(1,length(delta(1,:)));

signum = 1;
for i = 1:1:iterations,
   gamma = signum * K(i) * delta(i,:);
   integrandum = integrandum +  gamma;
   signum = (-1) * signum;
end;

addition = integrate (integrandum(:),step);
```

52. Función primitivefunction

```
function y = primitivefunction ( ordinates , delta );

y(1)= 0;
for i=2:1:length(ordinates),
   y(i) = y(i-1) + (1/2)*delta*(ordinates(i-1) + ordinates(i));
end;
```

53. Función integrate

```
function summa = integrate ( ordinates , delta );

 summa = 0;
 for i=2:1:length(ordinates),
   summa = summa + (1/2)*delta*(ordinates(i-1) + ordinates(i));
 end;
```

54. Función factorial

```
function y = factorial (x);
y = 1;
for i=1:1:x,
   y = y * i;
end;
```

55. Función diffinite

```
function dif = diffinite (abscissa,order,delta);

dif = 0;

for i=1:1:order+1,
```

```
   ordinate(i) = yfunction (abscissa+delta*(i-1));
end;

dif = diff(ordinate,order);
dif = dif * (1/(delta^order));
```

56. Función deltafunction

```
function delta = deltafunction (primitivek , k , points, step)

for i = 1:1:k,
   for j = 1:1:points,
      if i == 1
         deltai (i,j) = primitivek (j);
      else
         deltai (i,j) = primitivek (j + ((i-1)*(1/step)) - 1);
      end;
   end;
end;

delta = zeros (1,points);
signum = 1;

for i = k:-1:1,
   delta = delta + (deltai (i,:)) * (nchoosek (k-1,i-1)) * signum;
   signum = signum * (-1);
end;
```

57. Función EulerMacLaurin

```
function addition = EulerMacLaurin ( interval , iterations );

delta = 0.0001;
interval2 = (interval(1)):delta:(interval(length(interval))+1);
ordinates = yfunction (interval2);
addition = integrate (ordinates,delta);
B=[ 1/6 , 1/30 , 1/42 , 1/30 , 5/66 , 691/2730 , 7/6 , 3617/510 ,
43867/798 , 174611/330 , 854513/138 , 236364091/2730];
if iterations >= 2
   addition = addition + B(1)*(ordinates(length(ordinates))
   - ordinates(1));
   if iterations > 2
      for j=1:1:(iterations-2),
      diferencex0 = diffinite (1,j,delta);
      diferencex1 = diffinite (length(interval2),j,delta);
      addition = addition + B(j+1)*(1/(factorial(j+1)))*
      (diferencex1 - diferencex0);
      end;
   end;
end;
```

58. Función yfunction

```
function y = yfunction (x);
%In y we define the function that we want to add.

y = (ones(1,length(x)))./(x.^3) ;
```

59. Resultados obtenidos

Una vez que tenemos ya los programas necesarios, es preciso aplicarlos a sumar algunas series que nos sirvan para comparar los dos métodos. Para ello debemos elegir primero las funciones y los intervalos de sumación.

Las pruebas se han realizado para algunas funciones que cumplen en el intervalo la condición suficiente de convergencia (6) para el método de expansión integral, y para otras que no la cumplen.

En concreto, todas las funciones testeadas que se representan en la tabla 1 cumplen la condición suficiente (6), mientras que en la tabla 2 sólo cumplen (6) las funciones testeadas en las posiciones 1, 2 y 3.

Muestro los resultados obtenidos en las tablas 1 y 2.

510. Comentario de los resultados

Se observa en general que el método de expansión integral ofrece buenas aproximaciones a la suma exacta, con un error decreciente hasta una cierta iteración, y que a partir de ahí el error aumenta. Esto parece contradecir que el error tiende a 0 para aquellas funciones que satisfacen la condición suficiente de convergencia en el intervalo. La explicación a este comportamiento es que el algoritmo informático asociado no realiza integrales perfectas, sino aproximaciones a las mismas, de tal manera que en la iteración que anularía un determinado monomio de entre los que forman el desarrollo de la función en serie de Taylor en el intervalo, con el programa informático el monomio no se anula, y en las iteraciones sucesivas seguirá sin anularse, aportando al integrarlo entre los límites de integración un valor que se va acumulando a los precedentes, y provocando así un incremento del error a partir de aquella iteración correspondiente a la anulación teórica del monomio de mayor grado relevante en el desarrollo en serie de Taylor.

Por otra parte, también se observa que la implementación informática del método de Euler-McLaurin no ofrece muy buenas aproximaciones a la suma exacta, debido a que se toman como aproximaciones a las derivadas los valores correspondientes a las diferencias divididas en los puntos considerados, que para órdenes elevados no aproximan bien la derivada respectiva y que presentan además una alta variabilidad dependiendo del paso δ considerado en dichas aproximaciones. Esta aproximación a veces mala, dependiente de cada caso, se debe en esencia a que una derivada es el límite de la razón de cantidades evanescentes, no la razón de cantidades que están a punto de desvanecerse.

Conviene dejar claro que estos problemas no se presentan con el cálculo manual, según el cual podemos obtener integrales y derivadas exactas, y en el caso del método de expansión integral efectivamente el error decrecería hacia cero si la función sumada fuese un polinomio o si verificase alguna condición suficiente de convergencia.

Otro aspecto a notar es que aunque no se cumpla la condición suficiente de convergencia (6), se aprecia sin embargo que sí se obtiene un resultado satisfactorio mediante expansión integral, lo que lleva a intuir que quizás exista alguna condición más general y menos restrictiva que (7) que garantice un buen comportamiento del método en términos de convergencia.

Como conclusión, se puede afirmar que con los resultados obtenidos y para las funciones consideradas se comporta mejor el algoritmo informático presentado para el método de expansión integral que el presentado para el método de Euler-McLaurin, si comparamos los mínimos errores obtenidos según ambos para cada función, aunque también es cierto, y conviene recalcar este aspecto, que computacionalmente es más

.Función.	.Interv.	.Iters.	.Suma exp. integ. (1).	Err.(1).	.Suma Eul.-McL. (2).	Err.(2).	.Suma exacta.
$\exp 0.25x$	$[1, 101]$	2	4.10843910287251 x 10^{11}	1.70 %	4.94650038070089 x 10^{11}	18.00 %	4.17976709673847 x 10^{11}
idem.	idem.	3	4.22244388941172 x 10^{11}	1.02 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	4	4.31385478218123 x 10^{11}	3.20 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	5	4.69052873536698 x 10^{11}	12.20 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	6	5.94886706276329 x 10^{11}	42.30 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
$\exp 0.5x$	$[1, 101]$	2	1.98494347052151 x 10^{22}	8.60 %	3.05358967917893 x 10^{22}	40.00 %	2.17250327078979 x 10^{22}
idem.	idem.	3	2.24674838992692 x 10^{22}	3.40 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	4	2.20931507841772 x 10^{22}	1.69 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	5	2.33642807112516 x 10^{22}	7.54 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	6	2.62300716286036 x 10^{22}	20.00 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
$\exp 0.75x$	$[1, 101]$	2	1.14393159715114 x 10^{33}	23.60 %	2.50968447914288 x 10^{33}	67.55 %	1.49787194316424 x 10^{33}
idem.	idem.	3	1.68679669904502 x 10^{33}	12.60 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	4	1.44679121220059 x 10^{33}	3.41 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	5	1.62377435978176 x 10^{33}	8.40 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	6	1.67486365092554 x 10^{33}	11.80 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
$\exp 0.95x$	$[1, 101]$	2	4.25009408091821 x 10^{41}	44.30 %	1.47654009844536 x 10^{42}	93.34 %	7.63680365241098 x 10^{41}
idem.	idem.	3	1.00036458611213 x 10^{41}	30.99 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	4	6.29231624569355 x 10^{41}	17.60 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	5	9.06047038326632 x 10^{41}	18.64 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	6	7.79158175993520 x 10^{41}	2.02 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	7	9.83518208315459 x 10^{41}	28.70 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
$\exp -0.25x$	$[1, 101]$	2	3.47651072048638	1.25 %	2.98540300190346	15.2 %	3.52081166414972
idem.	idem.	3	3.54479302208077	0.68 %	2.98864796460406	15.11 %	.idem.
idem.	idem.	4	3.70632174702903	5.20 %	2.98845481443448	15.12 %	.idem.
idem.	idem.	5	4.41295219847383	25.33 %	2.98847208457042	15.11 %	.idem.
$\exp -0.5x$	$[1, 101]$	2	1.47225371833817	4.49 %	1.11197287639099	27.86 %	1.5414940825368
idem.	idem.	3	1.53895454363003	0.16 %	1.11702717219682	27.53 %	.idem.
idem.	idem.	4	1.62457106731859	5.38 %	1.1164254853307	27.57 %	.idem.
idem.	idem.	5	1.97652589651265	28.22 %	1.11653095651804	27.56 %	.idem.
$\exp -0.75x$	$[1, 101]$	2	0.8168548564856485602	8.75 %	0.551094311825878	38.44 %	0.895255134402343
idem.	idem.	3	0.878510456297895	1.87 %	0.556998672318857	37.78 %	.idem.
idem.	idem.	4	0.936963553738126	4.65 %	0.555944361755841	37.90 %	.idem.
idem.	idem.	5	1.146259455280690	28.03 %	0.556221069424965	37.87 %	.idem.
$\exp -0.95x$	$[1, 101]$	2	0.551554257777891	12.53 %	0.342638977226182	45.66 %	0.630632470531491
idem.	idem.	3	0.606822564536528	3.77 %	0.348762085911943	44.69 %	.idem.
idem.	idem.	4	0.653253048638449	3.58 %	0.347377162849469	44.91 %	.idem.
idem.	idem.	5	0.799318109474269	26.74 %	0.347837442811762	44.84 %	.idem.

Tabla 1. Resultados obtenidos por ordenador (1).

pesado y complejo el primero que el segundo, tanto en cantidad de memoria manejada como en tiempo de proceso.

Referencias.

[1] Euler, L. (1738). *Comment. Acad. sci. Imp. Petrop.*.

[2] MacLaurin, C. (1742). *A Treatise of Fluxions*.

[3] Hardy, H. (1949). *Divergent Series*.

[4] Nörlund, N.E. (1924). *Vorlesungen über Differenzenrechnung*.

[5] Guelfond, A.O. (1967). *Cálculo de diferencias finitas*.

[6] R.Spiegel, M. ,Abellanas, L. (2004). *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*.

.Función.	.Interv.	.Iters.	.Suma exp. integ. (1).	Err.(1).	.Suma Eul.-McL. (2).	Err.(2).	.Suma exacta.
$1/2^{0.5x}$	$[1, 101]$	2	2.35773821734173	2.33 %	1.92242776319562	20.37 %	2.41421356237309
idem.	idem.	3	2.42524953808849	0.45 %	1.92651210135014	20.20 %	.idem.
idem.	idem.	4	2.54528139244831	5.42 %	1.92617507773126	20.21 %	.idem.
idem.	idem.	5	3.06447653631409	26.93 %	1.92621594010647	20.21 %	.idem.
$2^{0.5x}$	$[1, 101]$	2	5.23844063441704 x 10^{15}	3.64 %	6.87262081815464 x 10^{15}	26.42 %	5.43632564994813 x 10^{15}
idem.	idem.	3	5.51820292749658 x 10^{15}	1.50 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	4	5.58349034575002 x 10^{15}	2.70 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	5	5.96994130415497 x 10^{15}	9.81 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
idem.	idem.	6	7.15303298126859 x 10^{15}	31.57 %	.NaN.	.NaN.	.idem.
$1/(5x+2)$	$[1, 101]$	2	0.916980491573436	2.14 %	0.834998892305629	10.89 %	0.937076099496068
idem.	idem.	3	0.93631809462336	0.08 %	0.836699451109248	10.71 %	.idem.
idem.	idem.	4	0.97731868078991	4.29 %	0.836121112365510	10.77 %	.idem.
idem.	idem.	5	1.13950252542735	21.60 %	0.836554793234577	10.72 %	.idem.
$1/x$	$[1, 101]$	2	5.0103230654014	3.59 %	4.45994013437912	14.18 %	5.19727850773863
idem.	idem.	3	5.14834622303294	0.94 %	4.47660513454576	13.86 %	.idem.
idem.	idem.	4	5.39248641572292	3.75 %	4.46867100698446	14.01 %	.idem.
idem.	idem.	5	6.31082316609286	21.42 %	4.47699953004203	13.85 %	.idem.
$1/(5x+2)^2$	$[1, 101]$	2	0.0352067629991918	13.33 %	0.0247800788343829	38.99 %	0.04062172506385247
idem.	idem.	3	0.0381043638939394	6.19 %	0.0252659354268735	37.80 %	.idem.
idem.	idem.	4	0.0409777768828509	0.87 %	0.0250180936679081	38.41 %	.idem.
idem.	idem.	5	0.0495236430886450	21.91 %	0.0252658796417461	37.80 %	.idem.
$1/\sqrt{5x+2}$	$[1, 101]$	2	8.14929191816105	0.25 %	7.93703789167713	2.85 %	8.17047356586935
idem.	idem.	3	8.22715892418427	0.69 %	7.93928755968606	2.82 %	.idem.
idem.	idem.	4	8.53098496240358	4.41 %	7.93871373653217	2.83 %	.idem.
idem.	idem.	5	9.78777064118056	19.79 %	7.93907216902701	2.83 %	.idem.
$1/x^2$	$[1, 101]$	2	1.29749177587979	20.64 %	0.823545432911049	49.63 %	1.63508192978983
idem.	idem.	3	1.44378517542732	11.69 %	0.85687376691095	47.59 %	.idem.
idem.	idem.	4	1.57779299932874	3.50 %	0.83307376420158	49.05 %	.idem.
idem.	idem.	5	1.91872402672710	17.34 %	0.866381534323831	47.01 %	.idem.
$1/x^3$	$[1, 101]$	2	0.750076844572893	37.59 %	0.33328543444797	72.27 %	1.20200837124983
idem.	idem.	3	0.898905934254709	25.21 %	0.383275436114359	68.11 %	.idem.
idem.	idem.	4	1.024502699811380	14.76 %	0.335680189807595	72.07 %	.idem.
idem.	idem.	5	1.264285260634110	5.18 %	0.418937664795944	65.44 %	.idem.
idem.	idem.	6	2.057121055386040	71.14 %	0.199556473692614	83.39 %	.idem.

Tabla 2. Resultados obtenidos por ordenador (2).