Indirect integration by the communicating tubes method

Integración indirecta mediante el método de vasos comunicantes

Manuel Verdes Piñeiro

Dedicatoria. A ellas, que nos hacen mejorar cada día como personas, y a una en especial, mi fuente de inspiración.

Abstract. In this paper a mathematical method is presented, to obtain a succession of Riemann-integrable functions $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ from a continous Riemann-integrable function $f(x),\ \ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ that converge uniformly with the n value increment and under some conditions, to the constant function M_∞ in the interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$, equal to the integral calculus medium value, verifying $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ $= \int_a^b f(x)dx = M_\infty(b-a)$.

The aspects treated here obey to the following order of presentation. First it is described the heuristics used to derive the method. Then it is showed formally and it is performed a study of the convergence, proving that it is uniform in the case it is produced. Finally it is introduced the schem of the extension of this method to $\mathbb{R}^n$, generalizing the calculus of the defined integral $\int\int \ldots \int_D f(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \ldots dx_n$ in a region $D \subset \mathbb{R}^n$.

Resumen.

En este artículo se presenta un método matemático en el que a partir de una función continua Riemann-integrable inicial $f(x),\ \ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, se obtiene una sucesión de funciones Riemann-integrables $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente al hacer n indefinidamente grande, y bajo ciertas condiciones, a la función de valor idénticamente constante M_∞ en el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, e igual al valor medio del cálculo integral, verificándose $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = M_\infty(b-a)$.

Los aspectos tratados aquí obedecen al siguiente orden de exposición. Primeramente se explica la heurística a partir de la que se realizó la génesis del método. A continuación se muestra formalmente éste y se realiza un estudio de la convergencia, probándose que ésta es uniforme en caso de producirse. Finalmente se introduce el esquema de la extensión del método a $\mathbb{R}^n$, generalizándolo al cálculo de la integral definida $\int\int \ldots \int_D f(x_1,\ldots,x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n$ en una región $D \subset \mathbb{R}^n$.

1 Heurística

11. El mediámetro

Supongamos un artilugio compuesto de N columnas de forma paralelepipédica de idénticas dimensiones en posición adyacente unas de otras. Supongamos que en cada una de estas columnas introducimos un líquido hasta una altura $y_i = f(x_i),\ x_i = a + i\Delta_N,\ i \in \{0,\ldots,N-1\}$, con $\Delta_N = \frac{b-a}{N}$, siguiendo el

Mathematics Subject Classifications: 26A42

e-mail: manuel.verdes@gmail.com

patrón que nos proporciona la función continua $f(x)$. Es inmediato deducir que si practicamos un agujero suficientemente bajo en la parte inferior de la pared que separa columnas adyacentes (de altura inferior al $\min_{i\in\{0,\dots,N-1\}}\{y_i\}$), el líquido fluirá de las columnas en las que alcanza mayor altura a aquéllas en las que alcanza menos, en virtud de las diferencias de presión hidrostática a ambos lados de cada pared, que actúan sobre el líquido situado en las proximidades de cada agujero, igualándose la altura en todas ellas. Ésto se produce de manera ideal, si nos abstraemos de la capilaridad y viscosidad del líquido. La altura del líquido una vez alcanzado el equilibrio resulta ser la media aritmética de los valores de las alturas iniciales y_i, puesto que el volumen del líquido es invariante y se verifica que el volumen inicial es

$$V_i = W\sum_{i=0}^{N-1} y_i\Delta_N,$$

y coincide con el volumen final

$$V_f = W\sum_{i=0}^{N-1} M_N\Delta_N,$$

con Δ_N y W constantes, es decir,

$$M_N = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} y_i}{N}$$

Supongamos ahora que hacemos tender a 0 el valor de Δ_N, incrementando el número de columnas, y ajustando la altura y_i de nuevo al patrón que nos proporciona la función $f(x)$ de partida, ignorando de nuevo la capilaridad y viscosidad del líquido. En el paso al límite tenemos un artilugio de columnas de anchura diferencial dx y una función continua $f(x)$, representada en la altura del líquido en cada compartimento infinitesimal. Resulta inmediato saber que una vez practicados los agujeros al artilugio de este experimento mental, el líquido fluirá de nuevo de aquellos elementos en los que alcanza mayor altura a los que alcanza menos, obteniéndose al final una altura igual al valor medio del cálculo integral del intervalo representado, puesto que

$$V_N = WS_N = W\sum_{i=0}^{N-1} f(a+i\Delta_N)\Delta_N = W\sum_{i=0}^{N-1} M_N\Delta_N,\ \Delta_N = \frac{b-a}{N}$$

Por lo que

$$\lim_{N\to\infty} V_N = \lim_{N\to\infty} WS_N = W\int_a^b f(x)dx = W\int_a^b M_\infty dx = V_\infty,$$

de donde

$$M_\infty = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

De este modo, en virtud de la ley física de los vasos comunicantes, tenemos un artilugio mental que nos permite hallar el valor medio del cálculo integral de una función continua $f(x)$ en un intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$, y por ende el valor de la integral definida de la función $f(x)$ en $[a,b]$. A este artilugio ideal lo denominaré en lo sucesivo con el nombre de *mediámetro*.

De acuerdo con lo comentado aquí, y ya hablando en términos de análisis matemático, una manera viable para obtener el valor medio del cálculo integral de $f(x)$ en $[a,b]$, y alternativa a las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico, consistiría en construir una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, en la que se reprodujese las variaciones del nivel del líquido en el mediámetro a medida que éste fluye hasta su situación de equilibrio en los infinitos compartimentos de anchura infinitesimal dx, forzando a que al variar el valor de n, la integral definida en $[a,b]$ correspondiente al volumen por debajo del nivel $f_n(x)$

fuese constante e idéntica a la integral de la función de partida $f_0(x) = f(x)$, y al de la función límite $f_\infty(x) = M_\infty = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, verificándose

$$I_0 = \int_a^b f_0(x)dx = I_n = \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = I_\infty = M_\infty(b-a)$$

La invarianza de $I_n,\ n \in \mathbb{N}$ debe ser una condición para la construcción formal de $f_n(x)$, o como mínimo dicha invarianza ha de ser asintótica.

12. Principios para la construcción de $\{\mathbf{f_n(x)}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$

Para lograr hallar alguna sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que sea candidata válida para el cometido que se pretende debemos primeramente fijar la heurística que nos permita obtenerla.

A cada $f_n(x)$ le debemos pedir en primer lugar que sea continua, siendo continua también $f_0(x) = f(x)$, pues de lo contrario $f_n(x)$ no sería Riemann-integrable. Su valor no se debe obtener mediante integración, pues en caso contrario incluiríamos lo que estamos buscando (el valor de la integral definida en $[a, b]$) como medio y no como fin, pero en su construcción se debe usar que I_n es invariante.

$f_n(x)$ ha de estar descrita idealmente mediante una única expresión compacta, y no por partes dentro de su dominio de definición $[a, b]$. Si ésto no sucediese el método se complicaría, y la solución o posibles soluciones han de ser lo más sencillas posibles. La variación al variar n de $f_n(x)$ ha de tener mayor cuantía cuanto más rápida y sostenida sea la variación de $f_n(x)$ en torno a x, pues ésto implica mayores diferencias de nivel en el mediámetro y mayores diferencias de presión hidrostática entre columnas adyacentes.

El valor de $f_n(x)$ ha de ser dependiente de sus valores vecinos a ambos lados de x, así como del propio valor en x. Ésto ha de ser así, porque la altura de líquido en cada columna del mediámetro depende del valor de la propia columna, así como de los valores de las columnas adyacentes, y transitivamente de las adyacentes de éstas (y así sucesivamente). Si $f_{n+1}(x)$ dependiese sólo de la parte derecha de $f_n(x)$ (del intervalo $(x, b]$), sucedería que si $f_{n+1}(x)$ se halla aplicando un promediado a $f_n(x)$ en dicho intervalo, como resultado final llegaríamos a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(b)$, pues el valor de $f_n(x)$ para $x = b$ sería constante para todo n, e igual al propio $f_0(b)$ (sería un punto inmóvil en la pared derecha del mediámetro que condicionaría $f_n(x)$ para todos los x a la izquierda de b). Es decir, no obtendríamos el valor medio del cálculo integral. Análogamente, si $f_{n+1}(x)$ dependiese sólo de los valores a la izquierda de x mediante un promediado se llegaría equivalentemente a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(a)$, y no hallaríamos tampoco el valor buscado.

13. Construcción de $\{\mathbf{f_n(x)}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$

Teniendo en cuenta lo descrito en la subsección anterior, estamos en condiciones de ensayar y concretar una expresión para $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Supongamos que $f_0(x) = f(x),\ \forall x \in [a, b]$, así como que $f_0(x) = 0,\ \forall x \notin [a, b]$, y que $f(x) \in \mathbf{C}^\infty\left([\mathbf{a}, \mathbf{b}]\right)$. Si consideramos

$$f_{k+1}(a + i\Delta_N) = \frac{f_k(a + i\Delta_N) + f_k(a + (i+1)\Delta_N)}{2}$$

tenemos una primera aproximación a la transformación de $f_k(x)$ para obtener $f_{k+1}(x)$.

La transformación discreta antes expresada no hace depender $f_{k+1}(a+i\Delta_N)$ de su vecindad por ambos lados, sino sólo por el lado derecho y por otra parte si sumamos todas las áreas que quedan por debajo de $f_{k+1}(a + i\Delta_N)$,

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(a) &= \frac{f_k(a)+f_k(a+\Delta_N)}{2} \\
f_{k+1}(a+\Delta_N) &= \frac{f_k(a+\Delta_N)+f_k(a+2\Delta_N)}{2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
f_{k+1}(a+(N-1)\Delta_N) &= \frac{f_k(a+(N-1)\Delta_N)+f_k(b)}{2}
\end{aligned}
$$

tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{V_N^{(k+1)}}{W} &= \Delta_N\left(\frac{f_k(a)}{2}+2\frac{f_k(a+\Delta_N)}{2}+2\frac{f_k(a+2\Delta_N)}{2}+\ldots+\frac{f_k(a+(N-1)\Delta_N)}{2}\right) \\
&= \frac{V_N^{(k)}}{W}-\frac{f_k(a)\Delta_N}{2}-\frac{f_k(a+(N-1)\Delta_N)\Delta_N}{2}
\end{aligned}
$$

siendo, como se pretende,

$$
\lim_{\Delta_N\to 0}\frac{V_N^{(k+1)}}{W}=\frac{V_\infty^{(k)}}{W}=\frac{V_\infty^{(0)}}{W}
$$

Sin embargo, no nos sirve para nuestros propósitos, puesto que esta transformación es inocua al incrementar N y hacer tender $\Delta_N\to 0$, pues tendríamos

$$
\lim_{N\to\infty} f_{k+1}(a+i\Delta_N)=\lim_{N\to\infty}\frac{f_k(a+i\Delta_N)+f_k(a+(i+1)\Delta_N)}{2}=\frac{2f_k(x)}{2}=f_k(x)
$$

Por lo tanto, para corregir estas contrariedades probaremos con una transformación que haga depender $f_{k+1}(x)$ de la vecindad a ambos lados de x en $f_k(x)$. Consideremos

$$
f_{k+1}(a+i\Delta_N)=\frac{f_k(a+i\Delta_N)+f_k(a+(i+1)\Delta_N)-f_k(a+(i-1)\Delta_N)}{2}
$$

De esta manera tenemos

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(a) &= \frac{f_k(a)+f_k(a+\Delta_N)}{2} \\
f_{k+1}(a+\Delta_N) &= \frac{f_k(a+\Delta_N)+f_k(a+2\Delta_N)-f_k(a)}{2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
f_{k+1}(a+(N-1)\Delta_N) &= \frac{f_k(a+(N-1)\Delta_N)+f_k(b)-f_k(a+(N-2)\Delta_N)}{2}
\end{aligned}
$$

con lo que

$$
\begin{aligned}
\frac{V_N^{k+1}}{W} &= \Delta_N\frac{(f_k(a+\Delta_N)+f_k(a+2\Delta_N)+\ldots+f_k(a+(N-1)\Delta_N))}{2} \\
&= \frac{V_N^k}{2W}-f_k(a)\Delta_N-f_k(a+(N-1)\Delta_N)\Delta_N \\
\lim_{\Delta_N\to 0}\frac{V_N^{(k+1)}}{W} &= \frac{V_\infty^{(k)}}{2W}=\frac{V_\infty^{(0)}}{2^{k+1}W}
\end{aligned}
$$

Si hacemos tender N a ∞, tenemos que no es invariante I_k al pasar a I_{k+1} y que la transformación no es inocua como antes, pues

$$\lim_{\Delta_N \to 0} f_{k+1}(x) = \lim_{\Delta_N \to 0} \frac{f_k(x) + f_k(x+\Delta_N) - f_k(x-\Delta_N)}{2} = \frac{f_k(x)}{2} + \frac{f_k^{'}(x)dx}{2}$$

Ahora bien, la transformación que obtenemos involucra a un elemento diferencial dx, que debemos eliminar de alguna forma de la expresión, por no ser manejable, y además $\lim_{N\to\infty} V_N^{(k+1)} \neq \lim_{N\to\infty} V_N^{(0)}$. Una forma de solventar estos problemas es sustituir el elemento infinitesimal por una constante h_k dependiente de cada valor de k, forzando a que se preserve la integral I_k al pasar a $f_{k+1}(x)$. De esta forma, tenemos

$$f_{k+1}(x) = \frac{f_k(x)}{2} + \frac{h_k f_k^{'}(x)}{2},$$

verificándose

$$I_{k+1} = \int_a^b f_{k+1}(x)dx = \int_a^b f_k(x)dx = \frac{\int_a^b f_k(x)dx}{2} + \frac{h_k \int_a^b f_k^{'}(x)dx}{2} = \frac{I_k}{2} + \frac{h_k(f_k(b) - f_k(a))}{2} = I_k$$

con lo que

$$h_k = \frac{M(b-a)}{f_k(b) - f_k(a)} = \frac{M}{f_k^{'}(\xi)}$$

siendo M el valor medio del cálculo integral de $f_k(x)$ en $[a,b]$ y $f_k^{'}(\xi)$ el valor medio del cálculo diferencial de $f_k(x)$ en $[a,b]$.

Puesto que M es el valor que queremos hallar mediante el método, no tiene sentido incluirlo como medio en nuestros cálculos, pero sí sin embargo podemos tomar

$$h_k = \frac{y_k(b-a)}{f_k(b) - f_k(a)}$$

con $y_{k+1} = f_{k+1}(x_0),\ x_0 \in (a,b)$, y tendremos que encontrar algunas condiciones para la función de partida $f_0(x) = f(x)$ para que la sucesión así descrita

$$\begin{array}{rcl} x_0 & \in & (a,b) \\ y_0 & = & f_0(x_0) \\ y_1 & = & \dfrac{f_0(x_0)}{2} + \dfrac{y_0(b-a)f_0^{'}(x_0)}{2(f_0(b) - f_0(a))} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k+1} & = & \dfrac{f_k(x_0)}{2} + \dfrac{y_k(b-a)f_k^{'}(x_0)}{2(f_k(b) - f_k(a))} \end{array}$$

sea convergente a M en (a,b).

Quedaría, pues, el término general con la siguiente forma

$$y_{k+1} = \frac{f_k(x_0)}{2} + \frac{y_k(b-a)f_k^{'}(x_0)}{2(f_k(b) - f_k(a))} \tag{1}$$

Además, para que la anterior sucesión sea construible, habrá de ser $f_0(b) \neq f_0(a)$, lo que tomaremos como hipótesis, y habremos de garantizar de alguna manera que, para cada valor de k, se verifica $f_k(b) \neq f_k(a)$.

Por otra parte, podemos ensayar además transformaciones del estilo

$$f_{k+1}(x_i) = G(f_k(x_{i-I}), f_k(x_{i-I+1}), \ldots, f_k(x_i), f_k(x_{i+1}), \ldots, f_k(x_{i+I})) = \sum_{m=-I}^{I} \lambda_m f_k(a+(i+m)\Delta_N),$$

fórmula que obedece a un promediado aplicado a los valores $y_i = f_k(a + i\Delta_N)$, variando i en el rango adecuado.

Un caso particular que se adapta formalmente a esta expresión sería, dado $p \in \mathbb{N}^*$ $p > 1$,

$$f_{k+1}(x) = \frac{f_k(x)}{p} - \frac{f_k(x - \Delta_N)}{p} + \frac{f_k(x + \Delta_N)}{p}$$

En este caso, si hacemos tender $\Delta_N \to 0$ tenemos

$$\lim_{\Delta_N \to 0} f_{k+1}(x) = \frac{f_k(x)}{p} + \frac{f_k^{'}(x)dx}{p}$$

Entonces, para mantener invariante I_k, deberíamos usar un h_k verificando:

$$I_k = \int_a^b f_k(x)dx = I_{k+1} = \int_a^b f_{k+1}(x)dx = \frac{1}{p}\int_a^b f_k(x)dx + \frac{1}{p}(f_k(b) - f_k(a))h_k = \frac{I_k}{p} + \frac{1}{p}(f_k(b) - f_k(a))h_k,$$

con lo que

$$h_k = \frac{(p-1)M(b-a)}{f_k(b) - f_k(a)},$$

y en la práctica, la expresión formal para esta generalización del método quedaría

$$\begin{array}{rcl}
x_0 & \in & (a, b) \\
y_0 & = & f_0(x_0) \\
y_1 & = & \dfrac{y_0}{p} + \dfrac{(p-1)y_0(b-a)f_0^{'}(x_0)}{p(f_0(b) - f_0(a))} \\
\vdots & & \vdots \\
y_{k+1} & = & \dfrac{y_k}{p} + \dfrac{(p-1)y_k(b-a)f_k^{'}(x_0)}{p(f_k(b) - f_k(a))}
\end{array}$$

Por lo tanto el término general de la sucesión sería

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{p} + \frac{(p-1)y_k(b-a)f_k^{'}(x_0)}{p(f_k(b) - f_k(a))} \quad (2)$$

Ante las expresiones (1) y (2), se observa claramente que su comportamiento obedece a lo requerido en 1.2, dado que la función transformada en cada paso $k+1$ lleva implícita información de la propia función $f_k(x)$, así como de la derivada $f_k^{'}(x)$. Lo primero tiene que ver con que el valor transformado para un $x \in (a, b)$ debe depender de la altura de líquido para x de la función de partida, y lo segundo con que también debe depender de las columnas adyacentes. Los mayores cambios en valor absoluto para un x tendrán lugar cuando la derivada tenga un valor absoluto grande en dicho punto, lo que lleva implícitas mayores diferencias de nivel entre las columnas próximas a x por ambos lados.

2 Descripción formal del método

Un vez ya explicada la heurística, en esta sección se describirá formalmente el método, siguiendo el caso expuesto en (2), una generalización del mostrado en (1).

Definición 1 *Sea $f_0(x) = f(x) \in \mathbf{C}^\infty([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ una función continua regular clase ∞ definida en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, Riemann-integrable, verificando $f(a) \neq f(b)$, y sea $p \in \mathbb{N}^*,\ p > 1$. Se define como sucesión de cambio equiescalado a la siguiente sucesión de funciones*

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x) \\ f_1(x) &= \frac{f_0(x)}{p} + \frac{(p-1)M(b-a)f_0^{'}(x)}{p(f_0(b) - f_0(a))} \\ \vdots\quad & \quad \vdots \\ f_{k+1}(x) &= \frac{f_k(x)}{p} + \frac{(p-1)M(b-a)f_k^{'}(x)}{p(f_k(b) - f_k(a))} \end{aligned}$$

donde M es el valor medio del cálculo integral de $f(x)$ en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si sucediese que para algún valor de k se cumple $f_k(a) = f_k(b)$ se elegirían $a_1 = a, b_1 = b - \epsilon, a_2 = b - \epsilon = b_1, b_2 = b$, tales que $f_k(a_1) \neq f_k(b_1)$ y $f_k(a_2) \neq f_k(b_2)$, definiendo en cada uno de los dos intervalos una sucesión

$$\begin{aligned} f_{k+1}^{(i)}(x) &= \frac{f_k(x)}{p} + \frac{(p-1)M_i(b_i - a_i)f_k^{'}(x)}{p(f_k(b_i) - f_k(a_i))} \\ f_{k+2}^{(i)}(x) &= \frac{f_{k+1}^{(i)}(x)}{p} + \frac{(p-1)M_i(b_i - a_i)f_{k+1}^{(i)'}(x)}{p(f_{k+1}^{(i)}(b_i) - f_{k+1}^{(i)}(a_i))}\ ,\ i \in \{1, 2\} \\ \vdots\quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

siendo M_i el valor medio del cálculo integral en $[a_i, b_i]$ y verificándose

$$M(b-a) = M_1(b_1 - a_1) + M_2(b_2 - a_2) \tag{3}$$

Definición 2 *Bajo los mismos supuestos citados en la anterior definición, dado $x_0 \in (a, b)$, denominaremos sucesión de cambio variable a la siguiente sucesión de funciones*

$$\begin{aligned} g_0(x) &= f(x) \\ g_0(x_0) &= y_0 \\ g_1(x) &= \frac{y_0}{p} + \frac{(p-1)y_0(b-a)g_0^{'}(x)}{p(g_0(b) - g_0(a))} \\ g_1(x_0) &= y_1 \\ \vdots\quad & \quad \vdots \\ g_{k+1}(x) &= \frac{y_k}{p} + \frac{(p-1)y_k(b-a)g_k^{'}(x)}{p(g_k(b) - g_k(a))} \\ g_{k+1}(x_0) &= y_{k+1} \end{aligned}$$

En el caso de que, para algún valor de k, se cumpliese $g_k(a) = g_k(b)$, se practicaría un desdoblamiento, continuándose a partir de k con las sucesiones de ambos subintervalos por separado, y una vez que se hallasen M_1 y M_2, se aplicaría (3) para calcular M.

Bajo ciertas condiciones que serán estudiadas en la siguiente sección, $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ $x \in (a,b)$ convergen puntualmente en (a,b) a M, lo que equivale a convergencia uniforme en (a,b), tal y como se verá en el *estudio de la convergencia*.

3 Estudio de la convergencia

En esta sección se probarán algunas proposiciones relativas a la convergencia de las dos sucesiones propuestas en las anteriores definiciones.

Lema 1 *Dada la sucesión de cambio variable, se verifica la siguiente igualdad*

$$y_k = y_0 \prod_{m=0}^{k-1} \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{g_m^{'}(x_0)}{g_m^{'}(\xi_m)} \right),\ k > 0 \tag{4}$$

PRUEBA. Lo demostramos por inducción. De manera trivial, para $k = 1$ se tiene

$$y_1 = \frac{y_0}{p} + \frac{(p-1)y_0}{p} \frac{g_0^{'}(x)}{g_0^{'}(\xi_0)} = y_0 \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{g_0^{'}(x)}{g_0^{'}(\xi_0)} \right)$$

Lo suponemos cierto para $k = i$, verifiquemos que se cumple para $k = i + 1$

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \frac{y_i}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{y_i g_i^{'}(x_0)}{g_i^{'}(\xi_i)} = y_i \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{g_i^{'}(x_0)}{g_i^{'}(\xi_i)} \right) \\ &= y_0 \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{g_i^{'}(x_0)}{g_i^{'}(\xi_i)} \right) \prod_{m=0}^{i-1} \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{g_m^{'}(x_0)}{g_m^{'}(\xi_m)} \right) \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$y_{i+1} = y_0 \prod_{m=0}^{i} \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{g_m^{'}(x_0)}{g_m^{'}(\xi_m)} \right)$$

□

Lema 2 *Dada la sucesión de cambio variable, se verifica la siguiente igualdad*

$$g_k(x) = \frac{g_0(x)}{p^k} + (p-1) \sum_{m=0}^{k-1} \frac{y_m g_m^{'}(x)}{p^{k-m} g_m^{'}(\xi_m)} \tag{5}$$

PRUEBA. Lo probamos por inducción. Para $k = 1$ se tiene

$$g_1(x) = \frac{g_0(x)}{p} + (p-1) \frac{y_0 g_0^{'}(x)}{p g_0^{'}(\xi_0)}$$

y si suponemos que la identidad se cumple para $k = i$, entonces para $k = i + 1$ tenemos

$$\begin{aligned} g_{i+1}(x) &= \frac{g_i(x)}{p} + (p-1)\frac{y_i g_i'(x)}{p g_i'(\xi_i)} = \frac{1}{p}\left(\frac{g_0(x)}{p^i} + (p-1)\sum_{m=0}^{i-1}\frac{y_m g_m'(x)}{p^{i-m} g_m'(\xi_m)}\right) + (p-1)\frac{y_i g_i'(x)}{p g_i'(\xi_i)} \\ &= \frac{g_0(x)}{p^{i+1}} + (p-1)\sum_{m=0}^{i-1}\frac{y_m g_m'(x)}{p^{i-m+1} g_m'(\xi_m)} + (p-1)\frac{y_i g_i'(x)}{p g_i'(\xi_i)} \\ &= \frac{g_0(x)}{p^{i+1}} + (p-1)\sum_{m=0}^{i}\frac{y_m g_m'(x)}{p^{i+1-m} g_m'(\xi_m)} \end{aligned}$$

□

Proposición 1 *La sucesión de cambio equiescalado descrita en la definición 1 converge puntualmente a* $M \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{f_k^{(r}(\xi_k)}{f_k'(\xi_k)} = 0,\ \forall r > 1$*, siendo* ξ_k *la abscisa relativa al valor medio del cálculo diferencial de* $f_k(x)$ *en* $[a,b]$*.*

PRUEBA. Hallamos el límite de $f_{k+1}(x)$ al tender k a ∞.

$$\lim_{k\to\infty} f_{k+1}(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f_k(x)}{p} + \frac{(p-1)M(b-a)}{p} \lim_{k\to\infty} \frac{f_k'(x)}{f_k(b) - f_k(a)} = L(x)$$

Como $f_0(x) \in \mathbf{C}^\infty([\mathbf{a},\mathbf{b}])$, $(\Rightarrow f_{k+1}(x) \in \mathbf{C}^\infty([\mathbf{a},\mathbf{b}]))$, entonces $f_k(b) - f_k(a) = f_k'(\xi_k)(b-a)$, siendo $\xi_k \in [a,b]$ la abscisa relativa al valor medio del cálculo diferencial de $f_k(x)$ en $[a,b]$. Por tanto

$$L(x) = \frac{1}{p}L(x) + \frac{(p-1)M}{p}\lim_{k\to\infty}\frac{f_k'(x)}{f_k'(\xi_k)}$$

Dado que $f_k(x)$ admite desarrollo en serie de Taylor en ξ_k se tiene

$$L(x) = \frac{1}{p}L(x) + \frac{(p-1)M}{p}\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{f_k''(\xi_k)}{f_k'(\xi_k)}(x-\xi_k) + \frac{f_k'''(\xi_k)}{2f_k'(\xi_k)}(x-\xi_k)^2 + \dots\right) = \frac{1}{p}L(x) + \frac{(p-1)M}{p}R(x)$$

Y este límite, en caso de existir, es igual al valor M si y sólo si

$$L(x) = M \Leftrightarrow M = \frac{M}{p} + \frac{(p-1)M}{p}R(x) \Leftrightarrow R(x) = 1,$$

es decir, hay convergencia puntual para la *sucesión de cambio equiescalado* si y sólo si

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_k^{(r}(\xi_k)}{f_k'(\xi_k)} = 0,\ \forall r > 1 \tag{6}$$

También podemos probar la implicación hacia la derecha usando el *lema 1*, tomando límites a ambos lados:

$$\lim_{k\to\infty} y_{k+1} = \lim_{k\to\infty} y_k\left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p}\frac{M f_k'(x)}{y_k f_k'(\xi_k)}\right)$$

y este valor es igual a M si

$$\lim_{k\to\infty} y_k = M,\ \lim_{k\to\infty}\frac{f_k^{(r}(\xi_k)}{f_k'(\xi_k)} = 0,\ \forall r > 1$$

□

Proposición 2 *La sucesión de cambio variable descrita en la definición 2 converge puntualmente a* M $\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{g_k^{(r}(\xi_k)}{g_k^{'}(\xi_k)} = 0,\ \forall r > 1$, *siendo* ξ_k *la abscisa relativa al valor medio del cálculo diferencial de* $g_k(x)$ *en* $[a,b]$.

PRUEBA. La sucesión de cambio variable $g_k(x)$ converge puntualmente a $M \Leftrightarrow$

$$L(x) = \frac{L(x)}{p} + \frac{(p-1)}{p} \lim_{k\to\infty} \frac{y_k g_k^{'}(x)}{g_k^{'}(\xi_k)},\ y_k = M + e_k,\ \lim_{k\to\infty} e_k = 0$$

Y $L(x)$ es igual al valor M si y sólo si

$$L(x) = M \Leftrightarrow M = \frac{M}{p} + \frac{(p-1)}{p} R(x) \Leftrightarrow R(x) = M,$$

o de otra forma

$$\begin{aligned} M &= \lim_{k\to\infty}(M+e_k) \lim_{k\to\infty} \frac{g_k^{'}(x)}{g_k^{'}(\xi_k)} \Leftrightarrow \\ \lim_{k\to\infty} \frac{g_k^{'}(x)}{g_k^{'}(\xi_k)} &= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{g_k^{''}(\xi_k)}{g_k^{'}(\xi_k)}(x-\xi_k) + \frac{g_k^{'''}(\xi_k)}{2g_k^{'}(\xi_k)}(x-\xi_k)^2 + \cdots \right) = 1 \end{aligned}$$

que equivale a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g_k^{(r}(\xi_k)}{g_k^{'}(\xi_k)} = 0,\ \forall r > 1 \tag{7}$$

También se podría probar el "si" usando el *lema 1* directamente

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} y_k &= \lim_{k\to\infty} y_0 \prod_{m=0}^{k-1} \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{g_m^{'}(x)}{g_m^{'}(\xi_m)}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} y_{k-1} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{g_k^{'}(x)}{g_k^{'}(\xi_k)}\right) \\ &= M = M \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)}{p} \frac{g_k^{'}(x)}{g_k^{'}(\xi_k)}\right) \end{aligned}$$

siguiéndose la condición de modo necesario pero no suficiente. □

Proposición 3 *Dada la sucesión de cambio equiescalado definida en la definición 1, se verifica*

$$f_k^{(r}(x) = \frac{1}{p^k} \sum_{m=0}^{k} (p-1)^m C_m^{(k)} f_0^{(r+m}(x) \tag{8}$$

donde
$C_m^{(k)} = \sum_{i=0}^{\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}-1} comb_i \left\{h_0^f, h_1^f, \cdots, h_{k-1}^f\right\},\ \ h_i^f = \frac{M(b-a)}{f_i(b)-f_i(a)}$

PRUEBA. Lo demostramos por inducción. Veamos que se cumple para $k = 1$.

$$f_1^{(r}(x) = \frac{f_0^{(r}(x)}{p} + \frac{(p-1)}{p} h_0^f f_0^{(r+1}(x) = \frac{1}{p}\sum_{m=0}^{1}(p-1)^m C_m^{(1)} f_0^{(r+m}(x),\ C_0^{(1)} = 1,\ C_1^{(1)} = h_0^f$$

Supongamos que se cumple para $k = i$, veamos que éllo implica que se verifica para $k = i+1$,

$$\begin{aligned} f_{i+1}^{(r}(x) &= \frac{1}{p} f_i^{(r}(x) + \frac{(p-1)}{p} h_i^f f_i^{(r+1}(x) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p^i}\sum_{m=0}^{i}(p-1)^m C_m^{(i)} f_0^{(r+m}(x)\right) \\ &+ \frac{(p-1)}{p} h_i^f \left(\frac{1}{p^i}\sum_{m=0}^{i}(p-1)^m C_m^{(i)} f_0^{(r+m+1}(x)\right) \\ &= \frac{1}{p^{i+1}}\left(\sum_{m=0}^{i}(p-1)^m C_m^{(i)} f_0^{(r+m}(x) + (p-1)^{m+1} h_i^f C_m^{(i)} f_0^{(r+m+1}(x)\right) \\ &= \frac{1}{p^{i+1}}\left(\sum_{m=0}^{i}(p-1)^m C_m^{(i)} f_0^{(r+m}(x) + \sum_{m=1}^{i+1}(p-1)^m h_i^f C_{m-1}^{(i)} f_0^{(r+m}(x)\right) \\ &= \frac{1}{p^{i+1}}\left(\sum_{m=1}^{i}(p-1)^m (C_m^{(i)} + h_i^f C_{m-1}^{(i)}) f_0^{(r+m}(x) + C_0^{(i)} f_0^{(r}(x) + (p-1)^{i+1} h_i^f C_i^{(i)} f_0^{(r+i+1}(x)\right) \end{aligned}$$

Entonces si tomamos $C_0^{(i+1)} = C_0^{(i)}$, $C_m^{(i+1)} = C_m^{(i)} + h_i^f C_{m-1}^{(i)},\ m \in \{1, \cdots, i\}$, $C_{i+1}^{(i+1)} = h_i^f C_i^{(i)}$, tenemos

$$f_{i+1}^{(r}(x) = \frac{1}{p^{i+1}}\sum_{m=0}^{i+1}(p-1)^m C_m^{(i+1)} f_0^{(r+m}(x)$$

con lo que la ecuación (8) se cumple $\forall k \in \mathbb{N}$. □

Proposición 4 *Dada la sucesión de cambio variable definida en la definición 2, se verifica*

$$g_k^{(r}(x) = \frac{1}{p^k}\sum_{m=0}^{k}(p-1)^m C_m^{(k)} g_0^{(r+m}(x) \tag{9}$$

donde
$C_m^{(k)} = \sum_{i=0}^{\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}-1} comb_i\left\{h_0^g, h_1^g, \cdots, h_{k-1}^g\right\},\ \ h_i^g = \frac{(M+e_i)(b-a)}{g_i(b)-g_i(a)}$

PRUEBA. Demostración análoga a la de la *proposición 3*, cambiando $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ por $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y los valores de los h_k y de los $C_m^{(k)}$ por los correspondientes a la sucesión $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$. □

Proposición 5 *La sucesión de cambio equiescalado $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge a M si y sólo si*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}(p-1)^m \left|C_m^{(k)}\right| \left|f_0^{(r+m}(x)\right| < \infty,\ \forall x \in (a,b),\ \forall r > 1 \tag{10}$$

PRUEBA. Supongamos que se verifica (10). En ese caso se tiene que dado $\epsilon > 0$,

$$\exists k_0^{(r)} = \log_p \max_{x_0\in(a,b)} \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{k}(p-1)^m \left|C_m^{(k)}\right| \left|f_0^{(r+m}(x_0)\right|}{\epsilon}$$

verificándose que $\forall k > k_0^{(r)},\ k \in \mathbb{N},\ \forall x \in (a,b),\ \forall r > 1$

$$\left| f_k^{(r}(x) - 0 \right| = \left| \frac{1}{p^k} \sum_{m=0}^{k} (p-1)^m C_m^{(k)} f_0^{(r+m}(x) \right| < \frac{1}{p^{k_0^{(r)}}} \sum_{m=0}^{k} (p-1)^m \left| C_m^{(k)} \right| \left| f_0^{(r+m}(x) \right|$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^{k} (p-1)^m \left| C_m^{(k)} \right| \left| f_0^{(r+m}(x) \right|}{\max_{x_0 \in (a,b)} \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} (p-1)^m \left| C_m^{(k)} \right| \left| f_0^{(r+m}(x_0) \right|} \epsilon \leq \frac{\sum_{m=0}^{k} (p-1)^m \left| C_m^{(k)} \right| \left| f_0^{(r+m}(x) \right|}{\lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} (p-1)^m \left| C_m^{(k)} \right| \left| f_0^{(r+m}(x) \right|} \epsilon < \epsilon$$

lo que equivale a

$$\lim_{k\to\infty} f_k^{(r}(x) = 0,\ \forall r > 1$$

De otra manera, si se cumple (10) éllo equivale a que existe $C > 0$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \left| f_k^{(r}(x) \right| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \sum_{m=0}^{k} (p-1)^m \left| C_m^{(k)} \right| \left| f_0^{(r+m}(x) \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{C}{p^k} = 0$$

de lo que se sigue también el resultado. $\square$

Proposición 6 *La sucesión de cambio variable $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M si y sólo si*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k} (p-1)^m \left| C_m^{(k)} \right| \left| g_0^{(r+m}(x) \right| < \infty,\ \forall x \in (a,b),\ \forall r > 1 \tag{11}$$

PRUEBA. Demostración análoga a la de la *proposición 5*, cambiando $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ por $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y los valores de los h_k y de los $C_m^{(k)}$ por los correspondientes a la sucesión $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\square$

Proposición 7 *La sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a M en $(a,b) \Leftrightarrow$ La sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a M en (a,b).*

PRUEBA.

$\Rightarrow$

Supongamos que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = M,\ \forall x \in (a,b)$$

Éllo equivale a

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(x) - M| = 0,\ \forall x \in (a,b)$$

Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $\epsilon_{x_0} > 0$ tal que $\epsilon > \epsilon_{x_0} > 0$, $x_0 \in (a,b)$, verificándose

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall k > k_0,\ |f_k(x_0) - M| < \frac{\epsilon_{x_0}}{2},$$

y además en particular $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy por ser convergente, con lo que dado $\epsilon > 0$ existe $\epsilon_{x_0}^* > 0$ tal que $\epsilon > \epsilon_{x_0}^* > 0$ cumpliéndose

$$\exists k_1 \in \mathbb{N},\ / \ \forall k > k_1,\ |f_k(x_0) - f_{k_1}(x_0)| < \frac{\epsilon_{x_0}^*}{2},\ x_0 \in (a,b),$$

con lo que que dado $\epsilon > 0$, podemos elegir $k^* = \max\{k_0, k_1\}$ verificando

$$\forall\, k > k^*,\ \forall\, x_0 \in (a,b),\ |f_k(x_0) - M| \leq |f_k(x_0) - f_{k^*}(x_0)| + |f_{k^*}(x_0) - M| < \frac{\epsilon^*_{x_0}}{2} + \frac{\epsilon_{x_0}}{2} < \epsilon$$

$\Leftarrow$

Si existe convergencia uniforme éllo implica convergencia puntual de manera trivial. $\square$

Proposición 8 *La sucesión $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a M en $(a,b) \Leftrightarrow$ La sucesión $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a M en (a,b).*

PRUEBA. Demostración análoga a la de la *proposición 7* cambiando $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ por $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Proposición 9 *La sucesión de cambio variable $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a M en (a,b) si y sólo si la sucesión de cambio equiescalado $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a M en (a,b).*

PRUEBA. Si utilizamos la expresión (5) y su equivalente para $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ podemos equiparar $f_0(x)$ y $g_0(x)$, que como es lógico, coinciden, escribiendo

$$g_0(x) = f_0(x) = p^k g_k(x) - (p-1)p^k \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(M+e_m)g_m^{'}(x)}{p^{k-m} g_m^{'}(\xi_m)} = p^k f_k(x) - (p-1)p^k \sum_{m=0}^{k-1} \frac{M f_m^{'}(x)}{p^{k-m} f_m^{'}(\xi_m)}$$

de modo que su diferencia es igual a 0 si y sólo si

$$0 = p^k\left(g_k(x) - f_k(x)\right) + p^k(p-1)\left(\sum_{m=0}^{k-1} \frac{M f_m^{'}(x)}{p^{k-m} f_m^{'}(\xi_m^{(f)})} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(M+e_m)g_m^{'}(x)}{p^{k-m} g_m^{'}(\xi_m^{(g)})}\right)$$

y puesto que en general $g_k(x)$ y $f_k(x)$ no son linealmente dependendientes se tiene tomando límites a ambos lados de la igualdad que la anterior ecuación se cumple si y sólo si

$$0 = \lim_{k\to\infty} g_k(x) - f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{M f_m^{'}(x)}{p^{k-m} f_m^{'}(\xi_m^{(f)})} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(M+e_m)g_m^{'}(x)}{p^{k-m} g_m^{'}(\xi_m^{(g)})}$$

lo que equivale a

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = M \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} f_k(x) = M$$

y a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g_k^{(r}(\xi_k^{(g)})}{g_k^{'}(\xi_k^{(g)})} = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{f_k^{(r}(\xi_k^{(f)})}{f_k^{'}(\xi_k^{(f)})} = 0,\ \forall r > 1$$

$\square$

Proposición 10 *La sucesión de cambio variable $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a M $\Rightarrow$*

$$\lim_{m\to\infty} g_0^{(r+m}(x) = 0,\ \ \forall r > 1$$

PRUEBA. Supongamos que la *sucesión de cambio variable* converge a M. Utilizando la *proposición 6*, tenemos

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}(p-1)^m\left|C_m^{(k)}\right|\left|g_0^{(r+m}(x)\right|<\infty,\ \forall x\in(a,b),\ \forall r>1$$

Y si esta serie converge, entonces el límite de la sucesión sumada ha de ser 0 necesariamente, con lo que obtenemos

$$\lim_{m\to\infty}\left|C_m^{(k)}\right|\left|g_0^{(r+m}(x)\right|=\lim_{k,m\to\infty}\left|C_m^{(k)}\right|\lim_{m\to\infty}\left|g_0^{(r+m}(x)\right|=F(M,g_i(a),g_i(b),a,b)\lim_{m\to\infty}\left|g_0^{(r+m}(x)\right|=0$$

es decir, como $F(M,g_i(a),g_i(b),a,b)\neq 0$, llegamos a

$$\lim_{m\to\infty}g_0^{(r+m}(x)=0,\ \forall r>1$$

Proposición 11 *En general, se verifica que*

$$\lim_{m\to\infty}f_0^{(r+m}(x)=0,\ \forall r>1\ \not\Rightarrow\ \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}\ \textit{converge a } M$$

PRUEBA. Para probarlo, basta encontrar un caso en el que se tenga la hipótesis, pero donde no exista convergencia. Supongamos que

$$f_0(x)>0,\ \forall x\in[a,b]$$

$$f_0^{(r+m}(x)>0,\ \forall r>1,\ \forall m\geq 0$$

y que

$$\lim_{m\to\infty}f_0^{(r+m}(x)=0,\ \forall r>1$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty}f_k^{(r}(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{f_0^{(r}(x)}{p^k}+\lim_{k\to\infty}\frac{(p-1)C_1^{(k)}f_0^{(r+1}(x)}{p^k}+\cdots+\lim_{k\to\infty}\frac{(p-1)^{k-1}C_{k-1}^{(k)}f_0^{(r+k-1}(x)}{p^k}\quad(12)$$

y este límite se puede acotar inferiormente por

$$\lim_{k\to\infty}f_k^{(r}(x)>\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(p-1)^m f_0^{(r+m}(x)}{p^k}>\lim_{k\to\infty}0\frac{1-(p-1)^k}{p^{k+1}}=0\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{p^{k+1}}-\left(\frac{p-1}{p}\right)^k\frac{1}{p}\right)=0$$

y por lo tanto la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, siendo $\lim_{m\to\infty}f_0^{(r+m}(x)=0,\ \forall r>1$.

Como ejemplo de función que cumple estas condiciones podemos considerar

$$f_0(x)=1.25^x,\ x\in[0,1]$$

que toma valores positivos en el intervalo considerado, y cuyas derivadas son positivas también en $[0,1]$ como fácilmente se comprueba

$$f_0^{(m}(x) = 1.25^x (\ln 1.25)^m$$

verificando

$$\lim_{m\to\infty} f_0^{(m}(x) = 0,\ x \in [0,1]$$

□

Proposición 12 *Si $f_0^{(r}(x) = 0,\ \forall r \geq r_0,\ r, r_0 \in \mathbb{N}$, entonces $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, y por lo tanto $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ también.*

PRUEBA. Aplicando límites a la expresión (8) tenemos

$$\lim_{k\to\infty}\left|f_k^{(r}(x)\right| \leq \lim_{k\to\infty}\left|\frac{f_0^{(r}(x)}{p^k}\right| + \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(p-1)C_1^{(k)} f_0^{(r+1}(x)}{p^k}\right| + \cdots + \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(p-1)^{k-1} C_{k-1}^{(k)} f_0^{(r+k-1}(x)}{p^k}\right| \quad (13)$$

con los siguientes valores para los $C_m^{(k)}$

$$\begin{aligned}
C_0^{(k)} &= 1\\
C_1^{(k)} &= C_1^{(k-1)} + h_{k-1}^f C_0^{(k-1)} = 1 + h_0^f + \cdots + h_{k-2}^f + h_{k-1}^f\\
C_2^{(k)} &= C_2^{(k-1)} + h_{k-1}^f C_1^{(k-1)} =\\
&= 1 + h_0^f + h_1^f(1+h_0^f) + \cdots + h_{k-2}^f(1 + h_0^f + \cdots + h_{k-3}^f) + h_{k-1}^f(1 + h_0^f + \cdots + h_{k-2}^f)\\
&= 1 + \sum_{m=0}^{k-1} h_m^f + \sum_{0\leq i,j\leq(k-1)}^{i\neq j} h_i^f h_j^f\\
C_3^{(k)} &= C_3^{(k-1)} + h_{k-1}^f C_2^{(k-1)} = 1 + h_0^f + h_1^f(1+h_0^f) + \cdots + h_{k-1}^f(1 + h_0^f + \cdots + h_0^f h_1^f + \cdots + h_{k-3}^f h_{k-2}^f)\\
&= 1 + \sum_{m=0}^{k-1} h_m^f + \sum_{0\leq i,j\leq(k-1)}^{i\neq j} h_i^f h_j^f + \sum_{0\leq i,j,l\leq(k-1)}^{i\neq j\neq l} h_i^f h_j^f h_l^f\\
\vdots \quad & \vdots
\end{aligned}$$

de modo que la expresión (13) podemos acotarla superiormente

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|f_k^{(r}(x)\right| &\leq \lim_{k\to\infty}\frac{A_r}{p^k} + \lim_{k\to\infty}\frac{(p-1)k\max_{i\in\{0,\cdots,k-1\}}\left|h_i^f\right| A_{r+1}}{p^k} + \cdots\\
&+ \lim_{k\to\infty}\frac{(p-1)^{k-1}A_{r+k-1}}{p^k}\\
&+ \lim_{k\to\infty}\frac{(p-1)^{k-1}\binom{k}{1}\max_{i\in\{0,\cdots,k-1\}}\left|h_i^f\right| A_{r+k-1}}{p^k}\\
&+ \lim_{k\to\infty}\frac{(p-1)^{k-1}\binom{k}{2}\max_{i\in\{0,\cdots,k-1\}}\left|h_i^f\right|^2 A_{r+k-1}}{p^k} + \cdots\\
&+ \lim_{k\to\infty}\frac{(p-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\max_{i\in\{0,\cdots,k-1\}}\left|h_i^f\right|^{k-1} A_{r+k-1}}{p^k} = 0
\end{aligned}$$

con $A_n > 0, \forall n < r_0,\ \ A_n = 0, \forall n \geq r_0$ y $\sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} < 2^k$. De modo que

$$\lim_{k\to\infty} f_k^{(r}(x) = 0,\ \forall r > 1$$

□

4 Esquema de la extensión del método a la integración definida en $\mathbb{R}^n$

Sea

$$I = \int\int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

con

$$D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0\}$$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ a \leq x_1 \leq b, \\ \phi_i(a, \{x_j,\ j \neq i \neq 1\}) \leq x_i \leq \phi_i(b, \{x_j,\ j \neq i \neq 1\}),\ i \in \{2, \cdots, n\}, j \in \{1, \cdots, n\} \end{array} \right\}$$

En este caso podemos hallar I según el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} I &= \int_{\phi_n(a,x_2,\cdots,x_n)}^{\phi_n(b,x_2,\cdots,x_n)} \int_{\phi_{n-1}(a,x_2,\cdots,x_n)}^{\phi_{n-1}(b,x_2,\cdots,x_n)} \cdots \int_{\phi_2(a,x_3,\cdots,x_n)}^{\phi_2(b,x_3,\cdots,x_n)} \int_a^b f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int\int \cdots \int_D \left(\frac{1}{A(D)} \int\int \cdots \int_D f_0(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

La forma usual para obtener I consistiría en iterar el proceso de integración definida en cada una de las variables $x_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}$.

Para poder aplicar el *método de vasos comunicantes* bastaría por lo tanto la iteración alternativa del mismo en x_i, suponiendo constantes $\{x_j,\ j \neq i\}$ para cada integral variando x_i.

Es decir, se empezaría por aplicar *vasos comunicantes* a

$$f_0^{(1)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_0(x_1, x_2^0, \cdots, x_n^0) = h_1(x_1)$$

y se obtendría

$$f_\infty^{(1)}(x_2^0, \cdots, x_n^0)$$

en función de las constantes $x_2^0, \cdots, x_n^0$.

Se continuaría partiendo de

$$f_0^{(2)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_\infty^{(1)}(x_2, x_3^0, \cdots, x_n^0) = h_2(x_2)$$

y llegando a

$$f_\infty^{(2)}(x_3^0, \cdots, x_n^0)$$

$$\vdots$$

La última iteración partiría de

$$f_0^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_\infty^{(n-1)}(x_n) = h_n(x_n)$$

y la aplicación del método daría como resultado el valor

$$M_\infty = \frac{1}{A(D)} \int\int \cdots \int_D f_0(x_1, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$